ICARE

PROBLEME 1

Notations

Dans ce problème , K désignera tantôt le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels , tantôt le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes .
$M_3(K)$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans K , et $GL_3(K)$ le groupe des matrices inversibles de $M_3(K)$.
On notera I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, et $\chi_M(x) = \det(M - x.I)$ le polynôme caractéristique d'une matrice M appartenant à $M_3(\mathbb{R})$.

Toute matrice M appartenant à $M_3(\mathbb{R})$ pouvant aussi être considérée comme un élément de $M_3(\mathbb{C})$, on distinguera pour une telle matrice les ensembles suivants :

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / \chi_M(\lambda) = 0\}$ appelé spectre réel de M , ses éléments étant nommés " valeurs propres réelles de M "

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \chi_M(\lambda) = 0\}$ appelé spectre complexe de M , ses éléments étant nommés " valeurs propres complexes de M "

On a bien évidemment l'inclusion $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

On dira qu' une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ si il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $M = PDP^{-1}$.
On dira qu' une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ si il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.
Pour tous nombres réels a,b et c , on considère la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, et on appelle E l'ensemble de toutes les matrices M(a,b,c) lorsque a ,b ,c parcourent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(a,b,c) / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

$f_{a,b,c}$ désignera l'endomorphisme de l' espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M(a,b,c) dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Enfin , il sera judicieux de noter j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

PARTIE 1

1) On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer J^2 et J^3.

   b) Déterminer le spectre complexe de J , puis montrer que J est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$. Expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}JP$ soit diagonale . J est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

2) Exprimer , pour tous réels a ,b et c , la matrice M(a,b,c) à l'aide des matrices I , J et J^2 .
   En déduire que E est une sous-algèbre de $M_3(\mathbb{R})$, dont on précisera la dimension .

3) Soit λ une valeur propre complexe de J, et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $JX = \lambda X$.
   a) Calculer le produit M(a,b,c) X, où M(a,b,c) est un élément quelconque de E.
   b) En déduire les valeurs propres complexes de M(a,b,c), que l'on exprimera à l'aide du nombre j.
   c) Montrer que tout élément de E est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.
   d) Montrer que les valeurs propres de M(a,b,c) sont toutes réelles si et seulement si b et c sont égaux.

4) On suppose que b = c, et on pose, pour alléger les notations : M(a,b) = M(a,b,b).
   a) Déterminer les valeurs propres de M(a,b), ainsi que les sous-espaces propres associés.
   b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, telle que pour tous réels a et b, la matrice $D = Q^{-1}M(a,b)Q$ soit diagonale. Expliciter une telle matrice Q, ainsi que la matrice D associée.

PARTIE 2

Cette partie s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$.
On éliminera les cas où $f_{a,b,c} \in \{id;\theta\}$, id étant l'identité de $\mathbb{R}^3$, et θ l'endomorphisme nul.

1) Déterminer les valeurs des réels a, b, c pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est une symétrie vectorielle ; préciser les éléments caractéristiques de cette symétrie.

2) Déterminer les valeurs des réels a, b, c pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur ; préciser les éléments caractéristiques de ce projecteur.

3) a) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+ac+bc=0 \end{cases}$.
   Préciser l'axe de cette rotation.

   b) *exemple* : montrer que J et J^2 sont les matrices de rotations de $\mathbb{R}^3$; préciser l'angle de ces rotations.

PROBLEME 2

E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, et $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ une base de E.
$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On considère pour tout couple $(i, j) \in \{1,2,...,n\}^2$, la matrice $E_{i,j} = (a_{pq})_{1 \leq p,q \leq n}$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé en ligne i et colonne j, qui vaut 1 : $\begin{cases} a_{pq} = 1 \text{ si } p = i \text{ et } q = j \\ a_{pq} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Enfin, pour tout endomorphisme f de E, on note c(f) l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f : $c(f) = \{g \in L(E) / gof = fog\}$

Les parties 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment de la partie 1.

PARTIE 1

1) Montrer que pour tout endomorphisme f de E, c(f) est une sous-algèbre de L(E).

2) a) Soit f un endomorphisme de E. On note M sa matrice dans la base B.
   Montrer que l'on a c(f) = L(E) si et seulement si M commute avec toutes les matrices $E_{i,j}$.
   b) En déduire que c(f) = L(E) si et seulement si f est une homothétie vectorielle.

3) On suppose que p est un projecteur de E, c'est à dire un endomorphisme vérifiant pop = p.
   On note r son rang.

   a) Montrer que $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$.

b) Montrer qu'un endomorphisme g de E commute avec p si et seulement si sa matrice dans une base adaptée à la somme $\mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Ker}\,p = E$ est du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A et C sont des matrices carrées dont on précisera l'ordre.

c) En déduire la dimension de l'espace vectoriel c(p), en fonction de n et de r.

4) On suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'indice n, c'est à dire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Prouver qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $B' = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), .., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

b) Ecrire la matrice M' de f dans cette base.

c) Montrer qu' un endomorphisme g de E commute avec f si et seulement si sa matrice dans la base B' est du type $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & . & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & . & . & . \\ \alpha_2 & \alpha_1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ \alpha_{n-1} & . & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$.

d) En déduire que $c(f) = \mathrm{Vect}(id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$. Quelle est sa dimension ?

PARTIE 2

Soient $x_1, x_2, .., x_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

On considère le déterminant d'ordre n suivant : $D_n(x_1, x_2, .., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & . & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & . & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & . & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1) Montrer que le déterminant $P_n(X) = D_n(x_1, x_2, .., x_{n-1}, X)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n-1$.

2) Calculer $P_n(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$; en déduire le degré de $P_n(X)$ et préciser son terme de plus haut

3) Ecrire $P_n(X)$ sous forme d'un produit de polynômes de degré 1 ; en déduire un lien entre les déterminants $D_n(x_1, x_2, .., x_n)$ et $D_{n-1}(x_1, x_2, .., x_{n-1})$.

4) Etablir que $D_n(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i)$.

PARTIE 3

Soit f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ deux à deux distinctes ; on note $E_1, E_2, .., E_n$ les sous espaces propres associés.

1) Montrer que si un endomorphisme g de E commute avec f, alors :
   a) il existe une base $(v_1, v_2, .., v_n)$ de E dans laquelle f et g sont représentés par une matrice diagonale.
   b) g s'écrit de manière unique $g = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + ... a_{n-1} f^{n-1}$

   Pour établir cette dernière assertion, on pourra s'intéresser au nombre de solutions $(a_0, a_1, .., a_{n-1})$ du système $g(v_k) = a_0 v_k + a_1 f(v_k) + a_2 f^2(v_k) + ... a_{n-1} f^{n-1}(v_k)$ où $1 \leq k \leq n$.

2) En déduire c(f), et préciser sa dimension.